Université Abdelmalek Essaâdi
ENSA de Tétouan

Année: 2010 - 2011
Gr1 : S1

Module d'Algèbre I
Série N° : 4

Exercice 1.

1) Trouver le module et un argument des nombres complexes:

a) $z = e^{i\theta} + e^{2i\theta}$. (Pour calculer une somme du type $e^{iu} + e^{iv}$ il est souvent utile de factoriser par $e^{i\frac{u+v}{2}}$).

b)) $z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$. En déduire les valeurs de $cos(\frac{\pi}{12})$ et $sin(\frac{\pi}{12})$.

2) Trouver les racines carrées complexes de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $cos(\frac{\pi}{8})$ et $sin(\frac{\pi}{8})$.

3) Linéariser $cos^4(x)sin(x)$.

4) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes:

a) $z^2 - 2(1+i)z + i = 0$,

b) $z^3 - 2iz^2 - (4+3i)z + 2i = 0$, sachant qu'elle possède une racine réelle.

Exercice 2.

1) Trouver dans $\mathbb{C}[X]$, le quotient Q et le reste R de la division euclidienne du polynôme $A = X^{n+1} - 2X^n + 2$ ($n \in \mathbb{N}^*$) par le polynôme $B = X - 1$.

2) Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme $X^n + X + 1$ par le polynôme $(X-1)^2$.

Exercice 3. Soit P un polynôme tel que le reste de la division euclidienne de P par $X - a$ est 1 et celui de P par $X - b$ est -1, $(a \neq b)$, quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$?

Exercice 4. Trouver les racines dans $\mathbb{C}[X]$ du polynôme $P = X^4 + 12X - 5$ sachant qu'il possède deux racines dont la somme est 2.

Exercice 5. Soit $P = (X^2 - X + 1)^2 + 1$. Vérifier que i est racine de P, en déduire alors la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P sur $\mathbb{R}[X]$.

√ **Exercice 6.** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$ Quel est le degré de P ? Le factoriser dans $\mathbb{C}[X]$.

√ **Exercice 7.** Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$ et $P_n = (X-1)^3Q + (X^2 - 3X + 2)^n$. Montrer que 1 est racine simple (resp: double) de P_n si, et seulement si $n = 1$ (resp $n = 2$).

T.C

Exercice 8. Décomposer en facteurs irréductibles les polynômes suivants:

a/ Dans $\mathbb{C}[X]$: $\boxed{P = X^3+iX^2+(2+i)X+1}$ et $Q = X^4-(1+2i)X^2-1+i$. — coeffic

b/ Dans $\mathbb{R}[X]$ de $\mathbb{C}[X]$: $P = X^4 + X^2 + 1$, $Q = X^6 - 2X^3 + 2$ et $R = (X-1)^6 + 3$.

coefficients réels

Exercice 9. On considère le polynôme:

$$P = X^5 - (2+3i)X^4 + 2(3i-1)X^3 + 2(3-i)X^2 - (3+2i)X + i \in \mathbb{C}[X].$$

Vérifier que 1 et i sont des racines de P et trouver leurs ordres. En déduire la décomposition de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 10. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P = X^3 + \alpha X + 2 \in \mathbb{R}[X]$.

Montrer que P a des racines multiples dans $\mathbb{C}$ si, et seulement si $\alpha = -3$, trouver dans ce cas les racines de P et leur multiplicité.

Exercice 11. Décomposer en facteur irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes: X^4+1, X^6+1, X^8+1 et $X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$ sachant quil admet une racine multiple.

Exercice 12. Soit a et b deux nombres complexes distincts, m et n deux entiers naturels. Montrer que si les polynômes $(X-a)^m$ et $(X-b)^n$ divisent un polynôme P, alors le polynôme $(X-a)^m(X-b)^n$ divise P.

Exercice 13. Soient P et Q deux polynômes premiers entre eux.

1. Montrer qu'alors P^n et Q^m sont premiers entre eux où n et m sont deux entiers positifs.
2. Montrer de même que $P+Q$ et PQ sont premiers entre eux.

Exercice 14. Soit n un entier positif.

1. Déterminer le pgcd des polynômes $(X^n - 1)$ et $(X-1)^n$.
2. Pour $n = 3$ démontrer qu'il existe un couple de polynômes (U, V) tel que $(X^3-1)U + (X-1)^3V = X - 1$. En donner un.

Exercice 15. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ et $d = pgcd(m,n)$ et $P = X^m - 1, Q = X^n - 1$ et $D = X^d - 1$.

1) a) Montrer que si $x \in \mathbb{C}$ est racine commune de P et Q alors x est racine de D (on pourra utiliser l'égalité de Bézout dans $\mathbb{Z}$).

(b) Montrer que si $y \in \mathbb{C}$ est racine de D, alors y est racine commune de P et Q (utiliser la défnition de d).

2) a) Soient $A, B \in \mathbb{C}[X]$ tels que toute racine de A est racine de B: Peut-on en déduire que A divise B ? Mme question si les racines de A sont simples.

b) Montrer que les racines de D et P sont simples et en déduire que $pgcd(P,Q) = D$.

Série n° 4 :

Ex 1 a/ Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $z = e^{i\theta} + e^{2i\theta}$

On a : $z = e^{i\left(\frac{3\theta}{2}\right)}\left[e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right]$

$\Rightarrow z = \left(2\cos\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{3\theta}{2}\right)}$

• Si $\cos\frac{\theta}{2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} |z| = 2\cos\frac{\theta}{2} \\ \arg(z) = \frac{3\theta}{2} + 2k\pi \quad k\in\mathbb{Z} \end{cases}$

$\theta \in]-\pi, \pi[$ (mod $2k\pi$)

• Si $\cos\frac{\theta}{2} < 0 \Rightarrow z = \left(-2\cos\frac{\theta}{2}\right) \times \left(-\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) - i\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right)$

$\theta \in]\pi, 3\pi[$

$\Rightarrow z = \left(-2\cos\frac{\theta}{2}\right) \times \left(\cos\left(\pi + \frac{3\theta}{2}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{3\theta}{2}\right)\right)$

$\Rightarrow z = \left(-2\cos\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{3\theta}{2}+\pi\right)}$

$\Rightarrow |z| = -2\cos\frac{\theta}{2}$

et $\arg(z) = \frac{3\theta}{2} + \pi + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$= \frac{3\theta}{2} + (2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

b/ Soit $z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$

$|z_1| = \sqrt{\frac{6}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$\Rightarrow \arg(z_1) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$z_2 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$\Rightarrow \begin{cases} |z_2| = \sqrt{2} \\ \arg(z_2) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$

$z_3 = \frac{z_1}{z_2} \Rightarrow \begin{cases} |z_3| = 1 \\ \arg(z_3) = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$

$= \frac{-2\pi + 3\pi}{12} + 2k\pi$

$= \frac{\pi}{12} + 2k\pi$

On a : $z_3 = \dfrac{\frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}}{1-i}$

$\Rightarrow z_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(1+i)}{2}\right)$

$= \frac{1}{4}\left((\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})\right)$

$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}\left((\sqrt{6}+\sqrt{2}) + i(\sqrt{6}-\sqrt{2})\right)$

$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2/ Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que :

$z^2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\Rightarrow z^2 = \left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^2$

$\Rightarrow \left(z - e^{i\frac{\pi}{8}}\right)\left(z + e^{i\frac{\pi}{8}}\right) = 0$

$\Rightarrow z = e^{i\frac{\pi}{8}}$ ou $z = -e^{i\frac{\pi}{8}} = e^{i\frac{9\pi}{8}}$

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} & (1) \\ 2xy = \frac{\sqrt{2}}{2} & (2) \\ x^2 + y^2 = 1 & (3) \end{cases}$

$(1) + (3) \Rightarrow 2x^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$

$\Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$(3) - (1) \Rightarrow 2y^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$\Rightarrow z = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

ou $z = \frac{-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$$\Rightarrow e^{i\frac{\pi}{8}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\text{et } \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

3/ Linéariser :

$\cos^4(x) \cdot \sin x =$

$$= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)$$

$$\frac{1}{32i}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^3\left(e^{2ix}-e^{-2ix}\right)$$

$$\frac{1}{32i}\left[e^{3ix} + 3e^{2ix}\cdot e^{-ix} + 3e^{ix}\cdot e^{-2ix} + e^{-3ix}\right]\left(e^{2ix}-e^{-2ix}\right)$$

$$\frac{1}{32i}\cdot\left(e^{5ix} \cancel{+} e^{ix} + 3e^{3ix} \cancel{+} 3e^{-ix} + 3e^{ix} - 3e^{-3ix} + e^{-ix} - e^{-i5x}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left[\frac{e^{5ix}-e^{-5ix}}{2i} + 3\,\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i} + 2\cdot\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left(\sin(5x) + 3\sin(3x) + 2\sin x\right)$$

4/a/ Considérons l'équation :

(*) $z^2 - 2(1+i)z + i = 0$

On a : $\Delta = 4(1+i)^2 - 4i = 4i$

Soit $\delta = \sqrt{2}(1+i)$ un r.c.c de Δ.

$\Rightarrow$ les racines de l'équation (*) sont :

$$z_1 = \frac{2(1+i)+\delta}{2} = \frac{2(1+i)+\sqrt{2}(1+i)}{2}$$

$$= \frac{(2+\sqrt{2})(1+i)}{2}$$

$$z_2 = \frac{2(1+i)-\delta}{2} = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)(1+i)$$

b/ Considérons l'équation :

(**) $z^3 - 2iz^2 - (4+3i)z + 2i = 0$

Soit $r \in \mathbb{R}$ une racine réelle de (**)

$$\Rightarrow r^3 - 2ir^2 - (4+3i)r + 2i = 0$$

$$\Rightarrow (r^3 - 4r) + i(-2r^2 - 3r + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^3 - 4r = 0 \\ -2r^2 - 3r + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r(r-2)(r+2) = 0 \Rightarrow r \in \{-2, 0, 2\} \\ -2r^2 - 3r + 2 = 0 \text{ seul } r = -2 \text{ est solution.} \end{cases}$$

Donc : $r = -2$

$$\Rightarrow (z+2)(z^2 + az + b) = 0$$

$$\Rightarrow (z+2)\underbrace{(z^2 - 2(1+i)z + i)}_{(*)} = 0$$

$$\Rightarrow z = -2 \text{ ou } z = \frac{2+\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

$$\text{ou } z = \frac{2-\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

Ex 2 :

1/ Soit Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de $A = X^{n+1} - 2X^n + 2$ par $B = X - 1$

C'est à dire :

$X^{n+1} - 2X^n + 2 = (X-1)Q + R$ où $\deg R < 1$

$\Downarrow$

$R \in K$

$R = A(1) = 1$

$$\Longrightarrow X^{n+1} - 2X^n + 1 = (X-1)Q$$

Remarque : On a : $\deg(Q) = n$

$$X^{n+1} - 2X^n + 1 = X^{n+1} - X^n - X^n + 1$$
$$= X^n(X-1) + (1-X^n)$$
$$= X^n(X-1) + (1-X)(1+X+X^2+\dots+X^{n-1})$$
$$= (X-1)(X^n - X^{n-1} - \dots - X - 1)$$
$$\Rightarrow \boxed{Q = X^n - X^{n-1} - \dots - X - 1}$$
$$\Rightarrow Q = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

Ex2:

1) $A = X^{n+1} - 2X^n + 2$ et $B = X - 1$

$A = BQ + R \quad \deg R < \deg B = 1$

$\Downarrow$

$R \in K$

$\Rightarrow X^{n+1} - 2X^n + 2 = (X-1)Q + R$

avec $R \in K$

Pour $\alpha = 1$, on a:

$1 - 2 + 2 = 0 + R(1) = R \Rightarrow R = 1$

D'où $X^{n+1} - 2X^n + 1 = (X-1)Q$

$\Rightarrow \deg Q = n$

Si $Q = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$, on a

$X^{n+1} - 2X^n + 1 =$

$= (X-1)(a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0)$

$= a_n X^{n+1} + a_{n-1} X^n + \dots + a_1 X^2 + a_0 X$

$- a_n X^n - \dots - a_2 X^2 - a_1 X - a_0$

$= a_n X^{n+1} + (a_{n-1} - a_n) X^n + \dots + (a_1 - a_2) X^2$

$+ (a_0 - a_1) X - a_0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n = 1 \\ a_{n-1} - a_n = -2 \Rightarrow a_{n-1} = -1 \\ a_{n-2} - a_{n-1} = 0 \Rightarrow a_{n-2} = a_{n-1} = -1 \\ \vdots \\ a_1 - a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = -1 \\ a_0 - a_1 = 0 \Rightarrow a_0 = a_1 = -1 \\ -a_0 = 1 \Rightarrow a_0 = \dots \end{cases}$$

D'où $Q = \{X^n - X^{n-1} - \dots - X \dots$

b/ $A = X^n + X + 1$ et $B = (X-1)^2 \dots$

$\exists Q, R \in K[X]$ tels que:

$A = BQ + R$ avec $\deg R < \deg B$

$\Rightarrow X^n + X + 1 = (X-1)^2 Q + aX + b$

$a, b \in K$

Si $\alpha = 1 \Rightarrow \boxed{3 = a + b}$

$nX^{n-1} + 1 = 2(X-1)Q + (X-1)^2 Q' + a$

Si $\alpha = 1 \Rightarrow n + 1 = a \Rightarrow b = 3 - n - 1$

$= 2 - n$

$R = (n+1)X + (2-n)$

Ex3: $P \in K[X]$ et $a, b \in K$ tels que $a \neq b$.

$P = (X-a)Q_1 + 1$ et $P = (X-b)Q_2 \dots$

$\exists Q, R \in K[X]$ tels que:

$P = (X-a)(X-b)Q + R$ avec $\deg(R) \dots$

$\Rightarrow P = (X-a)(X-b)Q + \alpha X + \beta,$

On a:

$1 = P(a) = \alpha a + \beta \Rightarrow \alpha(a-b) = 2$

$-1 = P(b) = \alpha b + \beta$

~~$\Rightarrow 1 = \frac{2a}{}$~~

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{2}{a-b}$

$\Rightarrow 1 = \dfrac{2a}{a-b} + \beta$

$\Rightarrow \beta = 1 - \dfrac{2a}{a-b} = \dfrac{a-b-2a}{a-b}$

$= \dfrac{a+b}{b-a}$

Donc $R = \left(\dfrac{2}{a-b}\right) X + \dfrac{a+b}{b-a}$

Ex4: Soit $P = X^4 + 12X - 5$

Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ sont des racines de P avec $z_1 + z_2 = 2$

$P(z_1) = 0 \Rightarrow z_1^4 + 12 z_1 - 5 = 0$ (1)

$P(z_2) = 0 \Rightarrow z_2^4 + 12 z_2 - 5 = 0$

$\Rightarrow (2 - z_1)^4 + 12(2 - z_1) - 5 = 0$

$\Rightarrow (2)^4 + 4(2)^3(-z_1) + 6(2)^2(-z_1)^2 + 4 \times 2(-z_1)^3 + (-z_1)^4 + 24 - 12 z_1 - 5 = 0$

$\Rightarrow z_1^4 - 8 z_1^3 + 24 z_1^2 - 44 z_1 + 35 = 0$ (1')

(1) et (1') $\Rightarrow z_1^4 + 12 z_1 - 5 = z_1^4 - 8 z_1^3 + 24 z_1^2 - 44 z_1 + 35$

$-8 z_1^3 + 24 z_1^2 - 56 z_1 + 40 = 0$

$\Rightarrow z_1^3 - 3 z_1^2 + 7 z_1 - 5 = 0$ (*)

On remarque que $z_1 = 1$ est racine de l'équation (*) et les autres racines sont : $z_1' = 1 - 2i$ et $z_1'' = 1 + 2i$

$P(z_1') = (1-2i)^4 + 12(1-2i) - 5$

$= (1 - 4i - 4)^2 + 12 - 24i - 5$

$= 9 + 24i - 16 + 12 - 24i - 5 = 0$

On peut prendre $u_1 = 1 - 2i$ et $u_2 = 1 + 2i$ comme racine de P telles que : $u_1 + u_2 = 2$

$\Rightarrow P = (X - u_1)(X - \overline{u_1})\, Q$

$= (X^2 - 2X + 5)\, Q$

$$\begin{array}{l|l} X^4 + 12X - 5 & X^2 - 2X + 5 \\ \hline X^4 - 2X^3 + 5X^2 & X^2 + 2X - 1 \\ \hline 2X^3 - 5X^2 + 12X - 5 & \\ 2X^3 - 4X^2 + 10X & \\ \hline -X^2 + 2X - 5 & \\ -X^2 + 2X - 5 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow P = (X^2 - 2X + 5)(X^2 + 2X - 1)$

$\Delta' = 1 + 1 = 2$

$\begin{cases} x_1 = -1 - \sqrt{2} \\ x_2 = -1 + \sqrt{2} \end{cases}$

D'où :

$P = (X - (1-2i))(X - (1+2i))(X + (1+\sqrt{2}))(X + (1 - \sqrt{2}))$

Exercice 5:

Soit $P = (X^2 - X + 1)^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$

On a : $P(i) = 0 \Rightarrow i$ est racine de P.

$\Rightarrow -i$ est aussi racine de P

$\Rightarrow P = (X - i)(X + i)\, Q = (X^2 + 1)\, Q$

On a :

$P = X^4 + 2X^2(-X + 1) + (-X + 1)^2 + 1$

$= X^4 - 2X^3 + 2X^2 + X^2 - 2X + 1 + 1$

$= X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 2$

$$\begin{array}{l|l} X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 2 & X^2 + 1 \\ \hline X^4 \quad + X^2 & X^2 - 2X + 2 \\ \hline -2X^3 + 2X^2 - 2X + 2 & \\ -2X^3 \quad - 2X & \\ \hline 2X^2 + 2 & \\ 2X^2 + 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

D'où : $P=(X^2+1)(X^2-2X+2)$

$\Delta' = 1-2 = -1 = (i)^2$

$x_1 = 1-i$ et $x_2 = 1+i$

$\Rightarrow P = (X-i)(X+i)(X-(1+i))(1-(1-i))$

Ex 6. Soit $n \in \mathbb{N}$ et :

$P(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$

$P(X) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (1)^k X^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k X^{n-k}$

$= \sum_{k=0}^{n} (1+(-1)^{k+1}) C_n^k X^{n-k}$

$= 2C_n^1 X^{n-1} + \cancel{\sum_{k=2}^{n} (1+(-1)^{k+1})}$

$+ \sum_{k=2}^{n} (1+(-1)^{k+1}) C_n^k X^{n-k}$

$= 2n X^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} (1+(-1)^{k+1}) C_n^k X^{n-k}$

. Si $n \notin \{0,1\}$ alors $\deg P = n-1$

Si $n=0 \Rightarrow P=0 \Rightarrow \deg(P) = -\infty$

Si $n=1 \Rightarrow P=2 \Rightarrow \deg(P)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{Si } n=0 \ \deg P = -\infty \\ \text{Si } n \in \mathbb{N}^* \ \deg(P) = n-1 \end{cases}$

Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de P

$\Leftrightarrow P(z) = 0$

$\Leftrightarrow (z+1)^n - (z-1)^n = 0$

$\Leftrightarrow (z+1)^n = (z-1)^n$

$P(1) = 2^n \neq 0 \Rightarrow z \neq 1$

$\Leftrightarrow \cancel{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)} \frac{(z+1)^n}{(z-1)^n} = 1$

$\Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$

$\Leftrightarrow \frac{z+1}{z-1} \in \left\{ w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, 0 \leq k \leq \right.$

D'où : $\frac{z+1}{z-1} = w_k$ $0 < k \leq n-1$

$\Leftrightarrow z+1 = w_k z - w_k$

$\Leftrightarrow 1 + w_k = (w_k - 1) z$

$\Leftrightarrow z = \frac{1+w_k}{w_k - 1}$ avec $k \leq n-$

les racines de P sont :

$z_1 = \frac{w_1+1}{w_1-1}, \dots, z_{n-1} = \frac{w_{n-1}+1}{w_{n-1}-1}$

et par suite :

$P = 2n(X-z_1) \cdots (X-z_{n-1})$

Ex 7.

Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$ et :

$P_n = (X-1)^3 Q + (X^2 - 3X + 2$

Si $n=0 \Rightarrow P_0 = (X-1)^3 Q + 1$

$\Rightarrow 1$ n'est pas racine de P_0

Si $n \neq 0$, on a :

$P_n = (X-1)\left[(X-1)^2 Q + (X-1)^{n-1}(X-2)^n\right]$

$= (X-1) S$ où :

$S(1) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq 1 \\ -1 \text{ Si } n = 1 \end{cases}$

1 est racine simple de P_n

$\Updownarrow$

$n = 1$

Si $n \geq 2$, on a :

$= (X-1)^2 \underbrace{\left[(X-1)Q + (X-1)^{n-2}(X-2)^n\right]}_{R}$

$= (X-1)^2 R$ où :

$R(1) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 2 \\ 1 & \text{si } n = 2 \end{cases}$

Donc $R(1) \neq 0 \Leftrightarrow n = 2$ et par suite 1 est racine double ssi $n=2$

Autre méthode :

2e méthode :

Si $n=0$, alors 1 n'est pas racine de P

Si $n \geq 1$:

$P' = 3(X-1)^2 Q + (X-1)^3 Q' + n(X^2-3X+2)^{n-1}(2X-3)$

$P'(1) = \begin{cases} -1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \neq 1 \end{cases}$

Donc 1 est racine simple $\Leftrightarrow n = 1$

Si $n \geq 2$ on a :

$P'' = 6(X-1)Q + 3(X-1)^2 Q' + 3(X-1)^2 Q' + (X-1)^3 Q'' + n(n-1)(X^2-3X+2)^{n-2}(2X-3)^2 + 2n(X^2-3X+2)^{n-1}$

$P''(1) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq 3 \\ 2 & \text{si } n = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ 1 est racine double de P $\Leftrightarrow n=2$

Ex 8 :

a/ Soit $P = X^3 + iX^2 + (2+i)X + 1$

On remarque que i est racine de P.

$P' = 3X^2 + 2iX + 2+i$

$\Rightarrow P'(i) = -3 - 2 + 2+i \neq 0$

Donc i est racine simple de P.

$$\begin{array}{l|l} X^3 + iX^2 + (2+i)X + 1 & X - i \\ \hline (-)X^3 - iX^2 & X^2 + 2iX + i \\ \quad 2iX^2 + (2+i)X + 1 & \\ (-)2iX^2 + 2X & \\ \quad iX + 1 & \\ \quad iX + 1 & \\ \quad 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow P = (X-i)(X^2 + 2iX + i)$

$\Delta' = -1 - i$

Soit $\delta = x + iy$ une r.c.c de Δ'

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -1 \\ 2xy = -1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow 2x^2 = \sqrt{2} - 1$

$\Rightarrow x^2 = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}$

$2y^2 = \sqrt{2} + 1$

$\Rightarrow y = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}}$

$\Rightarrow \delta = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}} - i\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}}$

ETUSUP.com

$z_1 = -i+\delta = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} - i\left(1+\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\right)$

$z_2 = -i-\delta = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} - i\left(1-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\right)$

$\Rightarrow P = (X-i)(X-z_1)(X-z_2)$

Soit $Q = X^4 - (1+2i)X^2 - 1 + i$

z est racine de $Q \Leftrightarrow z^2$ est racine de $Y^2 - (1+2i)Y - 1 + i$

Dont les racines sont i et $(1+i)$

- Soit $z = re^{i\theta}$ tel que $z^2 = i$

$\Leftrightarrow r^2 e^{2i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = 1 \\ 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)} = -z_1$

- De même, soit $z = \rho e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ tel que:

$z^2 = 1+i \Leftrightarrow r^2 e^{2i\varphi} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[4]{2} \\ \varphi = \frac{\pi}{8} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$z_1' = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{\pi}{8}}$ et $z_2' = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{9\pi}{8}} = -z_1'$

D'où : $Q = (X-z_1)(X-z_2)(X-z_1')(X-z_2')$

$= (X-z_1)(X+z_1)(X-z_1')(X+z_1')$

b/ Soit $P = X^4 + X^2 + 1$

On remarque que : j et $\bar{j}$ sont des racines de P et par suite $-j$ et $-\bar{j}$ sont aussi des racines de P.

Dans $\mathbb{C}[X]$:

$P = (X-j)(X-\bar{j})(X+j)(X+\bar{j})$

Dans $\mathbb{R}[X]$:

$P = (X^2 - X + 1)(X^2 - X + 1)$

Ex 8 : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tq:

1/ $P = X^6 - 2X^3 + 2$

$z \in \mathbb{C}$ est racine de $P \Leftrightarrow z^3$ est racine de $Y^2 - 2Y + 2$

$\Delta' = 1 - 2 = -1 = i^2$

$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1-i \\ y_2 = 1+i \end{cases}$

Soit $z = re^{i\theta}$ tq: $z^3 = 1+i$

$\Leftrightarrow r^3 e^{i3\theta} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = \sqrt{2} \\ 3\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[6]{2} \\ \theta = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

- Si $k = 0$ on a:

$z_0 = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{12}}$ est racine de P

$\Rightarrow \overline{z_0}$ est aussi racine de P.

- Si $k = 1$, alors:

$z_1 = \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$ est racine de P

$\Rightarrow \overline{z_1}$ est aussi racine de P

- Si $k = 2$, $z_2 = \sqrt[6]{2}\, e^{i\left(\frac{17\pi}{12}\right)}$ est racine de P

$\Rightarrow \overline{z_2}$ est aussi racine de P

Ds $\mathbb{C}[X]$, on a:

$P = (X-z_0)(X-\overline{z_0})(X-z_1)(X-\overline{z_1})(X-z_2)(X-\overline{z_2})$

$D_s\ \mathbb{R}[X]$

$P = \left(X^2 - \left(2\sqrt[6]{2}\cos\frac{\pi}{12}\right)X + \sqrt[3]{2}\right)$

$\times\left(X^2 - \left(2\sqrt[6]{2}\cos\frac{\pi}{4}\right)X + \sqrt[3]{2}\right)$

$\times\left(X^2 - \left(2\sqrt[6]{2}\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right)X + \sqrt[3]{2}\right)$

2/ $R = (X-1)^6 + 3$

Si $z \in \mathbb{C}$ est racine de R

$\Leftrightarrow (z-1)^6 + 3 = 0$

$\Rightarrow z-1$ est racine de Y^6+3

Soit $u = re^{i\theta}$ une racine de Y^6+3

$\Leftrightarrow u^6 = -3 \Leftrightarrow r^6 e^{i(6\theta)} = 3e^{i\pi}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[6]{3} \\ 6\theta = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[6]{3} \\ \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

• Si $k=0$: $u_0 = \sqrt[6]{3}\, e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt[6]{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$

est racine de $Y^6 + 3 \in \mathbb{R}[Y]$

$\Rightarrow \overline{u_0}$, $-u_0$ et $-\overline{u_0}$ sont des racines de Y^6+3

• Si $k=1$:

$u_1 = \sqrt[6]{3}\, e^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt[6]{3}\, i$ est racine de $Y^6+3 \in \mathbb{R}[Y]$

$\Rightarrow \overline{u_1}$ est racine de Y^6+3

D'où, les racines de R sont $1+u_0$, $1+\overline{u_0}$, $1-u_0$, $1-\overline{u_0}$, $1+u_1$ et $1+\overline{u_1}$.

Dans $\mathbb{C}[X]$ on a :

$R = (X-(1+u_0))(X-(\overline{1+u_0}))(X-(1-u_0))$
$(X-(\overline{1-u_0}))(X-(1+u_1))(X-(\overline{1+u_1}))$

Dans $\mathbb{R}[X]$:

$R = \left(X^2 - 2\underbrace{(1+\sqrt[3]{9})}_{\in\mathbb{R}}X + \underbrace{|1+u_0|^2}_{\in\mathbb{R}}\right)$
$\left(X^2 - 2(1-\sqrt[3]{9})X + |1-u_0|^2\right)$
$\left(X^2 - 2X + |1+u_1|^2\right)$

Ex 3 : Soit :

$P = X^5 - (2+3i)X^4 + 2(3i-1)X^3 + 2(3-i)X^2 - (3+2i)X + i \in \mathbb{C}[X]$

On a : $P(1) = 0$ et $P(i) = 0$

$P' = 5X^4 - 4(2+3i)X^3 + 6(3i-1)X^2 + 4(3-i)X - (3+2i)$

$P'(1) = 5 - 8 - 12i + 18i - 6 + 12 - 4i - 3 - 2i = 0$

$P'' = 20X^3 - 12(2+3i)X^2 + 12(3i-1)X + 4(3-i)$

$P''(1) = 20 - 24 - 36i + 36i - 12 + 12 - 4i \neq 0$

$\Rightarrow 1$ est racine de P d'ordre 2.

D'autre part, on a :

$P'(i) = 5 + 4i(2+3i) - 6(3i-1) + 4i(3-i) - 3 - 2i$

$= 5 + 8i - 12 - 18i + 6 + 12i + 4 - 3 - 2i$

$P'(i) = 0$

$P''(i) = -20i + 12(2+3i) + 12i(3i-1) + 4(3-i) = 0$

$\Rightarrow i$ est racine de P d'ordre ≥ 3

Comme $\deg P = 5 \Rightarrow i$ est racine de P d'ordre 3

$\Rightarrow P = (X-1)^2(X-i)^3$

Ex 10 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P = X^3 + \alpha X + 2 \in \mathbb{R}[X]$

P a des racines multiples $\Leftrightarrow \alpha = -3$

• Si $\alpha = -3$, alors 1 est racine multiple de P

• Supposons que $z \in \mathbb{C}$ est une racine multiple de $P \Leftrightarrow \begin{cases} P(z) = 0 \\ P'(z) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} z^3 + \alpha z + 2 = 0 \\ 3z^2 + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -3z^2 \end{cases}$

$\Rightarrow z^3 - 3z^3 + 2 = 0$

$\Rightarrow -2z^3 + 2 = 0 \Rightarrow z^3 = 1$

$\Rightarrow z \in \{1, j, \bar{j}\}$

Si $z = j \Rightarrow \alpha = -3j^2 = -3\bar{j} \notin \mathbb{R}$

Si $z = \bar{j} \Rightarrow \alpha = -3\bar{j}^2 = -3j \notin \mathbb{R}$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = -3} \Leftarrow z = 1$

Ds ce cas, 1 est racine de P d'ordre 2 et -2 est racine simple de P

Ex 11 Dans $\mathbb{R}[X]$ on a :

• $X^4 + 1 = X^4 + 2X^2 + 1 - 2X^2$

$= (X^2+1)^2 - (\sqrt{2}X)^2$

$= (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$

• $X^6 + 1$

Soit $z = re^{i\theta}$ une racine de X^6+1

$\Leftrightarrow \begin{cases} r^6 = 1 \\ 6\theta = \pi + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Si $k = 0 \Rightarrow z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ est racine de $X^6 + 1 \Rightarrow \bar{z_0}, -z_0, -\bar{z_0}$ sont aussi des racines de $X^6 + 1$.

Si $k = 1 \Rightarrow z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ est racine de $X^6+1 \Rightarrow \bar{z_1} = -i$ est aussi racine de $X^6 + 1$.

Enfin, $X^6 + 1 = (X - z_1)(X - \bar{z_1})(X - z_0)(X - \bar{z_0})(X + z_0)(X$

$= (X^2+1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}$

Ex 11

Soit $Q = X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$

$Q' = 4X^3 - 27X^2 + 60X - 44$

$Q'' = 12X^2 - 54X + 60$

Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de Q''

$\Rightarrow 12z^2 - 54z + 60 = 0$

$\Leftrightarrow 2z^2 - 9z + 10 = 0$

$\Delta = 81 - 80 = 1$

$\Rightarrow z_1 = \frac{9-1}{4} = 2$

et $z_2 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

On vérifie que

$\left.\begin{array}{l} Q(2) = 0 \\ Q'(2) = 0 \\ Q''(2) \neq 0 \end{array}\right| \Rightarrow 2$ est racine de Q d'ordre 3

$\Rightarrow Q = (X-2)^3 S \Rightarrow Q = (X-2)^3 (X-3)$

$$\begin{array}{l|l} X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24 & X^3 - 6X^2 + 12X - 8 \\ \hline -(X^4 - 6X^3 + 12X^2 - 8X) & X - 3 \\ \quad -3X^3 + 18X^2 - 36X + 24 & \\ \quad -(-3X^3 + 18X^2 - 36X + 24) & \\ \hline \qquad 0 & \end{array}$$

Exercice 12 : Soient $a, b \in \mathbb{C}$ avec $a \neq b$ et $m, n \in \mathbb{N}$:

Si $\left.\begin{array}{l}(X-a)^m \mid P \\ (X-b)^n \mid P\end{array}\right\} \Rightarrow (X-a)^m (X-b)^n \mid P$

Car $(X-a)^m$ et $(X-b)^n$ sont premiers entre eux

$D \mid (X-a)^m \Rightarrow D = (X-a)^i$

$D \mid (X-b)^m \Rightarrow D = (X-b)^j$

Si $D = P_1^{\alpha_1} \text{——} P_s^{\alpha_s} \Rightarrow P_1^{\alpha_1} \text{——} P_s^{\alpha_s} \mid (X-a)^i$

~~Si $\alpha_i \neq 0 \Rightarrow P_i^{\alpha_i} \mid (X-a)^i \Rightarrow P_i \mid X-a$~~

~~$P_i^{\alpha_i} \mid (X-b)^j \Rightarrow P_i \mid X-b$~~

Si $\alpha_i \neq 0 \Rightarrow P_i^{\alpha_i} \mid (X-a)^i \Rightarrow P_i \mid (X-a)^i \Rightarrow P_i = X-a$

$P_i^{\alpha_i} \mid (X-b)^j \Rightarrow P_i \mid (X-b)^j \Rightarrow P_i \mid X-b$

$a = b$
impossible

$\Rightarrow \alpha_i = 0 \;\; \forall\, i \leq s \Rightarrow D = 1 \Rightarrow (X-a)^m$ et $(X-b)^m$ sont premiers entre eux

Ex 13 : Soit $P, Q \in K[X]$ avec $P \wedge Q = 1$

Montrer que $P^n \wedge Q^m = 1$

Soit $D \in K[X]$ tel que : $D \mid P^n$ et $D \mid Q^m$

Si $D = P_1^{\alpha_1} \text{——} P_s^{\alpha_s}$ où $P_1, \text{——}, P_s$ sont premiers distincts deux à deux.

De même on a $P_i \mid Q$

$\Rightarrow D \mid P \wedge Q = 1 \Rightarrow D = 1$

$\Rightarrow P^n \wedge Q^m = 1$

b/ Mq si $P \wedge Q = 1 \Rightarrow (P+Q) \wedge (PQ) = 1$

On a $P \wedge Q = 1$

Donc $\exists U, V \in K[X] : PU + QV = 1$

$\Rightarrow PU + QU - QU + QV = 1$

$\Rightarrow \underbrace{(P+Q)}\, \underset{U_1}{\underset{\parallel}{U}} + Q \underbrace{(V-U)}_{V_1} = 1$

$\Rightarrow$ ① $(P+Q) \wedge Q = 1$ (D'après Bézout)

et on a : $PU + QV = 1$

$\Rightarrow PU + PV - PV + QV = 1$

$\Rightarrow P(U-V) + (P+Q)\, V = 1$

$\Rightarrow$ ② $(P+Q) \wedge P = 1$

De ① et ② on a :

$(P+Q) \wedge (PQ) = 1$

Ex 14 : Déterminer $(X^n - 1) \wedge (X-1)^n$

On a : $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n} \left(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)$

Si $D \in K$

$\cancel{D \mid (X^n - 1) \text{ et } D \mid (X-1)^n;\ D \mid (X-1)^i \mid \prod_{k=0}^{n-1}}$

$\cancel{\text{On a: } D \mid (X-1)^n \Longrightarrow D = (X-1)^i \text{ où } 0 \leq i \leq n}$

$D \mid X^n - 1 \text{ et } D \mid (X-1)^n \mid \Uparrow \ D = (X-1)^i \mid \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}\right) = (X-1)\left(\prod_{k=1}^{n-1} X - \ldots\right)$

$\Downarrow$

$i = 1$, <u>Sinon</u>

On a $D \mid (X-1)^n \Longrightarrow D = (X-1)^i$ où $0 \leq i \leq n$

On a: $(X-1)^{i-1} \mid \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)$

$\Longrightarrow (X-1) \mid \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}\right)$

$\exists\ 1 \leq k \leq n-1$ tel que: $X - 1 = X - e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}$

$\Longrightarrow 1 = e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}$ impossible

D'où: $\boxed{D = X - 1}$

<u>Pour $n = 3$:</u> $(X^3 - 1) \wedge (X-1)^3 = X - 1$

$\exists U, V \in K[X] : (X^3-1)U + (X-1)^3 V = X - 1$

Posons $U = aX + b$ et $V = cX + d$

$\Longrightarrow (X^3 - 1)(aX + b) + (X-1)^3(cX + d) = X - 1$

$\Longrightarrow aX^4 + bX^3 - aX - b + (X^3 - 3X^2 + 3X - 1)(cX + d) = X - 1$

$\Longrightarrow aX^4 + bX^3 - aX - b + cX^4 + dX^3 - 3cX^3 - 3dX^2 + 3cX^2 + 3dX - cX - d = X - 1$

$\Longrightarrow (a+c)X^4 + (b+d-3c)X^3 + (3c - 3d)X^2 + (3d - a - c)X - b - d = X - 1$

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ b + d - 3c = 0 \\ c - d = 0 \Longrightarrow c = d \\ 3d - a - c = 1 \Longrightarrow 3d = 1 \Longrightarrow d = \frac{1}{3} = c \Longrightarrow a = -\frac{1}{3} \text{ et } b = \frac{2}{3} \\ b + d = 1 \end{cases}$$

$\Longrightarrow U = -\frac{1}{3}X + \frac{2}{3}$ et $V = \frac{1}{3}(X + 1)$

Ex 15 : Soit $m, n \in \mathbb{N}$ et $d = m \wedge n$

$P = X^n - 1$, $Q = X^m - 1$ et $D = X^d - 1$

1/ a/ Si $z \in \mathbb{C}$:

$P(z) = Q(z) = 0 \Rightarrow D(z) = 0$

$D = X^d - 1 = X^{mU + nV} - 1$

avec $d = mU + nV$

$= X^{mU} \cdot X^{nV} - 1$

$= (X^{mU} - 1 + 1) X^{nV} - 1$

$= ((X^m)^U - 1) X^{nV} + (X^n)^V - 1$

$= (X^m - 1)((X^m)^{U-1} + (X^m)^{U-2} + \dots + 1) X^{nV}$

$+ (X^n - 1)((X^n)^{V-1} + (X^n)^{V-2} + \dots + 1)$ (*)

On a $z | X^m - 1$ et $z | X^n - 1$

$\Rightarrow z | (*) \Rightarrow z | D \Rightarrow D(z) = 0$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z^n = 1$

$Q(z) = 0 \Leftrightarrow z^m = 1$

Soit $U, V \in \mathbb{Z}$ tels que : $d = mU + nV$

On a : $z^d = z^{mU + nV} = z^{mU} \times z^{nV}$

$= (z^m)^U \times (z^n)^V = 1 \times 1 = 1$

$\Rightarrow z^d - 1 = 0 \Rightarrow z$ est racine de D

b/ Montrer si $z \in \mathbb{C}$ tel que :

$D(z) = 0$, alors $P(z) = Q(z) = 0$

$D(z) = 0 \Leftrightarrow z^d = 1$

Soit $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ tels que :

$m = dq_1$ et $n = dq_2$

$\Rightarrow z^n = z^{dq_2} = (z^d)^{q_2} = 1^{q_2} = 1$

$\Rightarrow P(z) = 0$

et $z^m = z^{dq_1} = (z^d)^{q_1} = 1^{q_1} = 1$

$\Rightarrow Q(z) = 0$

z est racine de $D \Leftrightarrow z$ est racine de P et Q

2/ Si $A | $ $A, B \in \mathbb{C}[X]$ tels que toute racine de A est racine de $B \overset{??}{\Rightarrow} A | B$

On a $A \in \mathbb{C}[X] \Rightarrow A = \lambda (X - \alpha_1)^{n_1} \text{---} (X - \alpha_r)$

où $\alpha_1, \text{---}, \alpha_r \in \mathbb{C}$ sont les racines distinctes deux à deux de A et $n_1, \text{---}, n_r$ sont leur ordre de multiplicité

$\Downarrow$

α_1 est racine de $B \Rightarrow (X - \alpha_1) | B$

α_r " " " $\Rightarrow (X - \alpha_r) | B$

$A = (X-1)^2 (X+1)$ et $B = (X-1)(X+1)$

Toute racine de A est racine de B, mais A ne divise pas B.

2/ Si $A, B \in \mathbb{C}[X]$ tels que toute racine de A est simple, Alors si toute racine de A est racine de B $\Rightarrow A | B$

On a : $A \in \mathbb{C}[X] \Rightarrow A = \lambda (X - \alpha_1) \text{---} (X - \alpha_r)$

où $\alpha_1, \text{---}, \alpha_r \in \mathbb{C}$ sont les racines distinctes 2 à 2 de A

$\Downarrow$

α_1 est racine de $B \Rightarrow (X - \alpha_1) | B$

α_r est racine de $B \Rightarrow (X - \alpha_r) | B$

$\Rightarrow (X - \alpha_1) \text{---} (X - \alpha_r) | B$

$\Downarrow$

$A | B$

Car $(X-\alpha_i) \wedge (X-\alpha_j) = 1$
$\forall i \neq j$.

b/ $P = X^n - 1$

Soit $z \in \mathbb{C}$, tel que :
$P(z) = 0 \Leftrightarrow z^n = 1$
$P' = nX^{n-1} \Rightarrow P'(z) = nz^{n-1} \neq 0$
$\Rightarrow z$ est racine simple.

De même tout racine de D est simple. $D = X^d - 1$.

Montrer que $D = pgcd(P, Q)$??

Soit $S \in \mathbb{C}[X]$ un diviseur commun à P et Q. S s'écrit sous la forme :

$S = (X - z_1)^{n_1} \cdots (X - z_s)^{n_s}$

où $z_i \neq z_j$, $\forall i \neq j$

On a : $(X - z_i)^{n_i} \mid P$

$\Rightarrow n_i = 1$ $\forall i = 1, \ldots, s$

$\Rightarrow S = (X - z_1) \cdots (X - z_s)$

z_i ~~est~~ racine de P et Q

$\Rightarrow z_i$ racine de D, $(\forall i = 1 \ldots s)$

$\Rightarrow (X - z_i) \mid D$, pour tout $1 \leq i \leq s$.

on a : $(X - z_1)(X - z_2) \cdots (X - z_s)$ divise D

$\Rightarrow S \mid D \Rightarrow D = P \wedge Q$ car $D \mid P$ et $D \mid Q$ (Car toute racine de D est une racine commune à P et Q)